රාහුල විද්‍යාලය - මාතර
Rahula College - Matara

දෙවන වාර පරීක්ෂණය - 2013

සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය	13 ශ්‍රේණිය	පැය තුනයි

01) $f_{(n)} = 5^n - 1$ යන්න 4 න් බෙදෙන බව පෙන්වීමට ද්විපද ප්‍රමේය භාවිතා කරන්න.

02) පිරිමි ළමුන් 8 ක් හා ගැහැණු ළමුන් 5ක් අතුරෙන්, 7 දෙනෙකු අඩංගු විවාද කණ්ඩායමක් පත් කළ යුතුව ඇත.

i. හරියටම ගැහැණු ළමයි 4 දෙනෙකු ඇතුළත්ව.

ii. අඩු වශයෙන් එක් ගැහැණු ළමයෙක්වත් ඇතිව විවාද කණ්ඩායම පත් කළ හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

03) $0 < k < 1$ නම් $(1-k)x^2 + x + k = 0$ සමීකරණයේ මූල සෑම විටම තාත්වික ද සෘණ ද වන බව පෙන්වන්න.

04) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ හා $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ විට $(A+B)^T = A^T + B^T$ බව පෙන්වන්න.

05) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ යන්න $\tan^{-1}x$ විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

06) $\int \frac{\sec^2 x \, dx}{\sqrt{1-\tan x}}$

07) $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$ අගයන්න.

08) $y = mx$ හා $y = m'x$ රේඛා $y = ax + b$ රේඛාව පිළිවෙලින් A හා B හිදී ඡේදනය කරයි. O මූල ලක්ෂ්‍යයයි. OACB සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි C ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

09) $x^2 + y^2 = 2$ හා $x^2 + y^2 + 3x - 3y - 8 = 0$ වෘත්ත අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශවන බව පෙන්වා පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

10) $4\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi$ නම් $x = 1/2$ බව පෙන්වන්න.

විභව
VIBHAWA
The Question Bank
Rahula College, Matara

B - කොටස

❖ ප්‍රශ්න පහකට පිළිතුරු සපයන්න.

11) a) i. a, b, c, යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ද $a \neq 0$ ද විට $f(x) = ax^2+bx+c$ වේයි. නම් p,q,x යනු තාත්වික සංඛ්‍යා වන පරිදි ද $a[(x-p)^2+q^2]$ හෝ $a[(x-p)^2-x^2]$ හෝ ලෙස f(x) ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. ඉහත ලෙස ඇති අවස්ථා කවදාද වීම කරන්න.

$f_1(x) \equiv -x^2+2x+3$ යන්න ඉහත ආකාර දෙකෙන් එකකින් ප්‍රකාශ කර එනයින් $y = f_1(x)$ ශ්‍රිතයේ දළ ප්‍රස්ථාරයක් අඳින්න.

ii. $d > 5$ හා (ii) $d < 5$ සඳහා $y = f_2(x) \equiv x^2 - 2x + d$ යන්නෙහි දළ ප්‍රස්ථාර ඉහත ඕ රූපයේ ම අඳින්න. $f_1(x) = f_2(x)$ වර්ගජ සමීකරණයට $d > 5$ විට තාත්වික මූල නැති බවත් $d < 5$ විට තාත්වික ප්‍රභින්න මූල 2ක් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න. $d = 5$ විට කුමක් වන්නේද?

b) $f(a,b,c) \equiv (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ හි සාධක සොයන්න.

12) a) $f(r) = \frac{1}{r^2}$ $(r \neq 0)$ නම් $f(r+1) - f(r) = \frac{-(2r+1)}{r^2(r+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\frac{3}{1^2 2^2} + \frac{5}{2^2 3^2} + \frac{7}{3^2 4^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ශ්‍රේණියේ පළමු පද n හි එකතුව සොයන්න.

ඉහත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

ii. $|x| < 1$ සඳහා $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} \ldots \ldots$ ප්‍රසාරණය

උපකල්පනය කිරීමෙන් $\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$ බව පෙන්වන්න.

iii. $\frac{1}{r(r+1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$Sn = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^r - \frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ බව පෙන්වන්න.

$n \longrightarrow \infty$ විට $Sn \to 1 - \ln 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

13) i. $y = |x| - 1$ ශ්‍රිතයේ දළ ප්‍රස්ථාරය අඳින්න එනයින් $y = \left||x| - 1\right|$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්ථාරය අපෝහනය කරන්න.

එම ප්‍රස්ථාරය මගින් $\left||x|-1\right| > 3$ අසමානතාව විසඳන්න.

VIBHAWA
The Question Bank
Rahula College, Matara

ii). ආගන්ඩ් සටහනේ P හා Q මගින් Z_1 , Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරේ. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය වේ. $|Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2|$ නම් OQ හා OP ලම්බ බව පෙන්වන්න.

iii). a,b, යනු තාත්වික සංඛ්‍යා වන $a + ib$ ආකාරයෙන් $(3+2i)(7+5i)$ හා $(3-2i)(7-5i)$ සුළු කරන්න.
$11^2 + 29^2$ යන්නෙහි සාධක ප්‍රථමයන් අපෝහනයෙන් ඒ හයින් එක එකක් දෙකක ගුණිතය ලෙස ද ප්‍රකාශ කරන්න.

iv). $|z + 1| + |z - 1| = 4$ හා $\operatorname{Arg}(iz) = \pi$ වන පරිදි z හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

14) i). සුදුසු ශ්‍රිත අවකලනය කිරීමෙන් $0 < x < \pi/2$ සඳහා $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ බව සාධනය කරන්න.

එනයින් $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii). $y = f(x) \equiv (x-1)^2 (x+1)$ ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

a) y අක්ෂය හමුවන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද,

ii). හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද (m) රේඛාවේ ... ද ගෙන හැර දක්වමින් $y = \frac{1}{f(x)}$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් ද අඳින්න.

15) i). $\int e^x [f(x) + f'(x)]dx = e^x f(x) + c$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\int e^x \left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right) dx$ සොයන්න.

ii. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)} dx$ අගය සොයන්න.

iii). $I_n = \int \frac{dx}{(1+ax^2)^n}$ නම් $2n\, I_{n+1} + (1-2n) I_n = \frac{x}{(1+ax^2)^n}$ බව පෙන්වන්න.

16) a) $\lambda(y-x)(3x-y) + \mu(3x-y)(2x+y+1) + \gamma(y-x)(2x+y+1) = 0$ සමීකරණයෙන් දැක්වෙන වක්‍රය $y-x=0$, $3x-y=0$, $2x+y+1=0$ සරල රේඛාවලින් සෑදී ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ හරහා යන බව පෙන්වන්න.

එම වක්‍රය එම ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නම් μ හා γ හි අගය λ ඇසුරින් සොයන්න.

Vibhawa
The Question Bank
Rahula College, Matara

(b) $x^2 + y^2 = 25$ වෘත්තයේ $y-x+1=0$ රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා S, S^1 වෘත්ත දෙකක්

ඒවා ඇඳ ඇත්තේ S සහ S^1 වෘත්ත දෙකම $x+y-25=0$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන පරිදිය.

S සහ S^1 හි සමීකරණ සොයන්න.

S සහ S^1 හි පොදු ස්පර්ශක ඡේදනය නොවන බව ද පෙන්වන්න.

17) i). $5\cos^2 x + 18\sin x \cos x + 29\sin^2 x$ යන්න $a + b\cos(2x+\beta)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි a, b, හා β යනු ඒවා x වලින් ස්වායත්ත වේ. k යනු නියතයක් විට $2(\cos x + \sin x) + (\cos\alpha + 5\sin\alpha)\sin\theta = k$ සමීකරණය විසඳිය හැකි නම් $k^2 \leq 32$ බව පෙන්වන්න.

ii). $\sin^4 x + \cos^4 x \equiv 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ බව පෙන්වා එනයින් $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

iii). ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා a, b, c සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම්,

$\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව පෙන්වන්න.

විභව
VIBHAWA
The Question Bank
Rahula College, Matara